

初中数学三角函数解题技巧探究

● 侯志强



[摘要] 在初中数学知识体系中,三角函数是重要的学习内容之一。学生应提高三角函数的解题能力,为后续数学学习做好准备。本文首先分析了初中数学三角函数解题的难点;然后,探究了初中数学三角函数是解题技巧,如角度解题法、直接代入法和换元解题法;最后,提出了提高学生三角函数解题能力的培养策略,包括“关注数形结合,培养分析思维”“巩固学习基础,强化问题转换”“开展系统训练,培养应用能力”“化简为繁模式,提高数学素养”。希望本文的研究能为相关人员提供参考。

[关键词] 解题技巧;三角函数;初中

初中数学三角函数知识的特点是其具有一定的零散性,要求学生具有较强的数学知识综合运用能力。教师应在教学环节结合学生的认知能力,培养学生掌握较强的三角函数解题技巧,以提高其三角函数知识学习能力。

初中数学三角函数解题难点

三角函数问题衍射至方方面面的数学知识,而且可以激活学生数学学习潜能、塑造学生数学思维素养,培养其数学思维能力。三角函数虽隶属函数范畴,但其解题思路与普通函数的解题模式存在较强的差异。尤其对于余弦与正切及正弦的转换,是学生难以突破的难点问题。三角函数解题涉及较为多元、复杂的数学信息,包括几何图形、解题思想、计算公式等,还会涉及知识的迁移与转换,这都需要考察学生的函数实现、转换意识及抽象思维。因此,学生在解决三角函数知识内容的过程中,很难把握重点内容,甚至会出现解题误区。尤其是刚接触初中三角函数知识的学生,其在解题过程中会出现一系列的问题、困惑、疑虑等。因此,教师需要将各类型相关三角函数的问题呈现给学生,并鼓励其以构建、整合、归纳等方式突破三角函数解题难点。

初中数学三角函数解题技巧探究

(一) 角度解题法

角度解题法作为初中三角函数解题一种常见的手段,学生理应掌握。这种类型的解题方法大都会呈现出在正弦下两个角的相应关系,要求学生将其的正切关系式进行证明,或对其正切关系式进行求得。在遇到这类问题的过程中,

学生应注意从整体角度的出发思考问题,并深度剖析条件与结论之间的关系。通过对问题分析不难发现,结论中存在一些角度间的关系,应以角度的方式进行解题。在解题的过程中,应相互转换条件中的角和结论中的角,确保题目的条件与结论保持统一的状态。在用角度解题法解决三角函数问题的过程中,还应注意运用到弦切互化的方式。只有熟练掌握这一解题方式,才能灵活运用角度解题法。

例如,在教学“锐角三角形函数”相关知识时,教师应先帮助学生理解余弦定义与正弦定义的关系,并结合边的关系及每个边对应角的关系推导出正弦。如按照三角形对边关系分析,三角形中的长为 c 、短边为 a 、 b ,由此得出 $c > b$ 、 $a > b$;结合边的关系开展分析,每个边与之相对应的角,其关系为 $\angle c > \angle b$ 、 $\angle a > \angle b$,由此可以推断出正弦 $\cos a = 1/2$ 、 $\sin a = a/c$,其中的 $\cos a$ 代表的是 c 与 b 的关系,而 $\sin a$ 表示的是 $\angle a$ 与对应边 c 与 a 的关系。若存在特殊角,如等腰直角三角形,若 $\cos 30^\circ = 1/2$, $\sin 30^\circ = \sqrt{3}/2$,两个角分别为 30° 、 60° , $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$,反之 $\cos 60^\circ = 1/2$, $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ 。结合上述边角关系进行分析,特殊锐角的正弦值相关余弦值。

再例,已知 $\angle B = 90^\circ - \angle A$, $\sin A = 1/2$,那么, $\cos B$ 的值应为多少? 可以根据正弦、余弦的转换关系进行分析, $\because \cos B = \cos(90^\circ - A) = \sin A = 1/2$, $\therefore \cos B = 1/2$ 。学生可以在分析正弦及余弦定义的基础上,思考二者的转换关系,帮助学生构建从一般到特殊,或从特殊到一般的解题思路,确保学生能够运用正确的思路进行解题,凸显角度解题法的应用效果。

(二) 直接代入法解题

在学习初中三角函数知识内容的过程中,教师可以引导学生通过直接代入法解决数学问题,这是一种较为常见的解题方式。它是在掌握基本的三角函数公式的基础上,通过理解题意后将公式直接代入以求出答案。尤其可以在遇到最小值或最大值问题的阶段,可以使用直接代入法解题。使用直接代入法应关注其中三角函数的已知问题,在对题目进行解答的过程中,需要结合题目开展分析,简化三角函数的解题方法,并将其在其他函数问题中进行转换。

例如,在学习三角函数知识内容的过程中,教师应注意结合三角函数的定义对学生进行教学启发。如某数学学习小组的同学开展课外实践学习活动,需要测量一棵大树的高度,从A点处开始测量,测得直立与地面的大树其顶端的仰角 α 为 36° ,再以水平方向向前行走6m,在大树脚下的底点D处停下,斜面坡的比值为 $i=1:2.4$,求大树CD的高度。其中 $\cos 36^\circ \approx 0.81$, $\tan 36^\circ \approx 0.73$, $\sin 36^\circ \approx 0.59$ 。教师可以结合三角函数的性质启发学生思考,若 $AE \perp BF$ 于F,那么, $BD=FE=6m$, $BF=DF$,可以设置 $BF=xm$,那么, $AF=2.4m$,在 $Rt\triangle ABF$ 中,可以根据勾股定理开展分析,再套入公式直接解题。通过解方程,可以得出 $AF=12m$, $BF=DE=5m$ 。因此,能够求得AE的长度,在 $Rt\triangle ACE$ 中,根据三角函数定理求得CE的值。解题过程为,作 $AE \perp BF$ 于F,那么, $BD=FE=6m$, $BF=DE$,由于斜坡AB的坡度为 $i=1:2.4$,因此, $AF=2.4BF$,将BF设置为 xm ,那么, $AF=2.4xm$,在 $Rt\triangle ABF$ 中,通过勾股定理可以解决问题,并套入公式后求出 $x=5$,由于 $AF=12m$, $BF=DE=5m$,因此, $FE+AF=AE=18m$ 。

再如,有一个建筑物,有一块标识在其顶端,将其设置为CD,小茗在斜坡上对C的仰角进行测量,发现为 45° ,沿着斜坡向下走,在地面A处对标识牌D的仰角进行测量,发现为 60° ,斜坡AB的坡角是已知的为 30° , $AE=AB=10m$,那么,请给出标识牌CD的高度。在解决问题的过程中,教师可以引导学生学习过点B作 $CE \perp BN$ 于点N、过点B作 $EA \perp BM$ 的延长线与点M,在 $Rt\triangle ABM$ 中, $\angle BAM=30^\circ$, $AB=10m$,因此, $BM=AB \cdot \sin \angle BAM=5m$, $AM=AB \cdot \cos \angle BAM=5\sqrt{3}m$ 。在 $Rt\triangle ADE$ 中, $\angle DAE=60^\circ$, $AE=10m$,因此, $DE=AE \cdot \tan \angle DAE=10m$ 。在 $Rt\triangle BCN$ 中, $\angle CBN=45^\circ$, $BN=AE+AM=(10+5\sqrt{3})m$,所以, $CN=BN \cdot \tan \angle CBN=(10+5\sqrt{3})m$,所以, $CD=EN+CN-DE=10+5\sqrt{3}+5-10\sqrt{3}=15-5\sqrt{3}$ 。解决这一数学问题时,教师应启发学生在思考数学问题后,可以通过套入公式的方式进行解题,以此提高学生的三角函数知识学习效率,增强其对三角函数公式的灵活运用能力。

(三)换元法解题

换元法解题是指用一个量代替另一个量进行解题,这能够简化三角函数知识学习难度,提高学生的解题效率。因此,教师需要培养学生理解不同类型问题的能力,确保学生可以突破三角函数的学习难点。教师还应引导学生通过解题来自主总结解题规律,以此了解问题的切入点,进而能够顺利地解题。在解题过程中,学生需要有清晰的解题思路,应先在读题后简化问题的内容,以化简的方式解决问题,并注意通过换元法的方式,将算式中的式子转化为最简便的、能够利用的已知条件,再结合已知条件出发,通过适宜的三角公式进行转换,将所求式子的值进行推导,继而同时化简已知条件与求值式。这种实用性较强的换元法解题模式,能够帮助初中阶段的学生更好地学习三角函数知识。

例如,在学习求函数在某区间的值时,求函数最小正周期问题的过程中,教师应注意引导学生学会对函数的奇偶性进行判断,进而求对称轴方程及对称中心,并了解 $y=\sin x$ 的图形与所给函数之间变换关系的问题,进而通过三角恒变换公式转换函数解析式,成为 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的形式,在对应的结果进行求得即可。

Q 提高学生三角函数解题能力的策略

(一)关注数形结合,培养分析思维

初中阶段三角函数知识学习的内容涵盖正弦定理、余弦定理及勾股定理等内容。培养学生分析及解决问题的能力是学习三角函数知识的基础。数形结合问题的教学在于通过图形的方式呈现数学问题,让学生能以更为直观的方式了解问题的本质,并以本质层面对问题开展分析,以此提高学生的三角函数问题分析能力。在每次对学生开展教学引导的过程中,教师都应提醒学生关注从图形化的角度分析三角函数问题,让学生具有通过分析图形解决问题的能力,帮助学生养成良好的解题习惯。

例如,在解决图形问题的过程中,如三角形CDE及ABC均为等腰直角三角形,点N在AE的中点,点D、C、B在同一条直线, $CD=2$, $BC=6$,对 $\tan \angle AEC=BC/CD$ 进行求得。教师可以启发学生根据已知数据自主画图,以此让学生能够清晰地看到两个等腰直角三角形CDE和ABC, $\angle ABC=\angle CDE=90^\circ$, $BC=AB=6$, $DE=CD=2$,因此, $ED \parallel AB$, $\tan \angle AEC=AC/CE$,所以, $BC/CD=AC/CE$,因此, $\tan \angle AEC=CD/BC$ 。

(二)巩固学习基础,强化问题转换

对三角形关系进行揭示的重要定理是正余弦定理,其能直接解决三角函数相关的问题。结合实际解题过程开展分析,学生容易弄混概念,这是由于其对基础知识掌握缺乏精细度,进而用错公式,打乱学习思路,导致原本简单的问题变得复杂,这难以培养学生正确的解题思维。因此,教师

需要从培养学生基本学习能力入手,帮助学生认知并熟悉更多的解题方法,通过巩固基础学习内容,确保学生具有问题转换的能力。

例如,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,若 $\tan A = 1/2$, $\angle ACB = 90^\circ$,那么, $\sin B$ 的值是多少?这是一道基础性的问题,教师可以通过为学生讲述三角函数理论知识的方式启发学生学习,这能提高学生的认知能力,帮助学生构建体系化的学习氛围,让学生在提高基础能力的同时,提升自身的学习效率。教师可以启发学生思考,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,已知 $\tan A = 1/2$, $\angle C = 90^\circ$,可以设 $BC = k$, $AC = 2k$,那么, $AB = \sqrt{(2k)^2 + k^2} = \sqrt{5}k$,通过解题可知 $\sin B = AC/AB = 2/\sqrt{5}$,通过解题可知答案为 $2\sqrt{5}/5$ 。

(三)开展系统训练,培养应用能力

数学知识与生活具有较强的关联性。因此,教师可以从生活角度为学生导入三角函数的知识内容,确保简化学习难度,使学生能够高质量、高效率地学习。同时,结合生活内容启发学生思考,也能激发学生的学习兴趣,调动学生数学知识学习的自觉意识。教师可以先为学生讲述三角函数的理论知识,再引导学生开展第二课堂的实践学习,通过实践学习的方式对学生进行系统化的训练引导。这项学习能够培养学生的发散思维能力,确保学生可以结合自身已有的认知进行学习,以此培养其数学综合思维能力。

例如,教师可以带领学生测量操场上旗杆的学习,若想获得正确的答案,就需要关注直角三角形的应用问题、俯角仰角问题、方向问题这三大基本要素。比如,解直角三角形的应用,需要对直角三角形进行构造,并对边及角的度数进行测量,再对所需求得的物体长度及高度进行计算。可以通过抽象的方式,将实际问题以抽象的方式呈现,并构建三角形。结合已知条件选择通过边角关系或锐角三角函数对直角三角形进行分析,在求得问题答案后,再回到实际问题层面。关于俯角、仰角及方向问题,应将水平线与视线的关系厘清,并分析已知条件。若图像中不存在直角三角形,则应通过垂线或作高对直角三角形进行构造;对于方向问题,应理解通过一个方向朝另一个旋转后获得相应的度数。还应结合题意对图形中各种角的关系进行解析,若在直角三角形中并没有涵盖所给方向,则需要通过一个角的余角知识或两条直线平行内错角相等的概念解决问题。

(四)化简为繁模式,提高数学素养

对于初中阶段的三角函数知识,教师应注意从培养学生的数学核心素养入手。教师可以在课堂教学环节,以化简为繁的方式培养学生的数学解题能力。初中数学三角函数的知识内容逻辑性、复杂性均较强,也与现实生活有更为紧密的关联,教师可以通过为学生构建体系化的三角函数知识模式来帮助学生总结三角函数的知识内容,并注意将三角函数的知识点进行串联。教师还应注意启发学生从不同角度思考三角函数问题,以此提高学生的思考能力。

例如,三角函数与三角形知识内容关联性较强,也与其他数学知识或多或少的存在一定的联系。因此,教师可以将线段、圆形、直径等知识内容导入课堂教学中,确保学生能够根据更多熟悉的内容学习三角函数知识。教师还应鼓励学生在日常学习中对与三角函数相关的数学问题进行练习,帮助学生做好数学知识学习储备,以此间接提高学生的三角函数理解能力。

Q 结束语

教师需要结合生活实际对学生开展三角函数知识的教学引导,这能简化学习难度,让学生从形象化的角度看待抽象化的数学问题。同时,教师应帮助学生理解三角函数的实际应用价值,这能调动学生的学习积极性,促进学生数学综合能力的突破,增强学生的数学核心素养。

参考文献

- [1]吴立宝,刘颖超,曹雅楠.基于问题链的初中数学课堂高阶思维培养路径研究[J].天津市教科院学报,2022,34(01):21-27.
- [2]张伟俊.学科单元教学的设计与实施策略——以初中“锐角三角函数”教学为例[J].上海教育科研,2021(12):81-86.
- [3]张龙军,熊莉莉,张景中,李兴贵,饶永生.教育数学在农村初中首轮实验的探索与思考——“重建三角”在成都市青白江区祥福中学实验分析[J].数学教育学报,2021,30(05):33-38,65.
- [4]王伟.基于知识衔接的概念教学探究——以“三角函数”为例[J].丽水学院学报,2021,43(02):75-79.

作者简介:

侯志强(1984—),男,汉族,甘肃定西人,本科,一级教师,通渭县襄南教育学区,研究方向:初中数学。