

可视化《线性代数》教学的案例挖掘和实验设计

●张颖 陈国艳



[摘要] 目前,线性代数教学的相关工作大多基于一种工程应用开展,缺少实验程序步骤,不利于推广和应用。在教学改革的背景下,本文设计了一系列实验,并用代码实现。本文一方面对线性代数中的抽象概念和定理进行几何解释和可视描述,另一方面,对线性代数在实际工程中的若干应用给出几何直观解释。本文提出的实验设计操作简单,可直接应用于教学实践。

[关键词] 线性代数;教学改革;可视化

Q 研究背景

教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会主任徐宗本院士指出,大学期间的课程对学生影响最大的就是线性代数,其次是高等数学(下册)的多元微积分。外国著名的数学教育家 David C.Lay 在其畅销多年的优秀教材《线性代数及其应用》中指出:“线性代数课程是最有趣、最有价值的大学数学课程”。2019年2月,张云勇院长指出,通信技术的发展离不开数学基础研究的支撑,微积分的应用、傅里叶级数、线性代数等数学理论都给通信技术的发展提供了依据。线性代数知识的抽象性一直是线性代数教学改革重点关注的问题,将数学建模和案例教学融入线性代数教学,是解决这一难题的主要方向。研究表明,数学软件与数学实验可以有效强化学生对抽象概念的理解,提高线性代数教学效果。Matlab 以其高效的矩阵运算、完备的结果可视化、丰富的应用工具箱等功能优势,成为辅助线性代数教学的首选数学软件。用数学软件分析与计算是理工科学生必须具备的能力。

基于 Matlab 的线性代数教学研究已经引起了许多学者的关注,他们面对不同的问题,开发出了不同的教学实验和案例。比如从几何变换、信息隐藏、图像处理等方面进行多方面的实践。然而,这些工作大多都基于一种工程应用展开,缺少实验程序步骤,不利于推广和应用。本文尝试将编程实践融入线性代数教学,以数学建模思想为底层逻辑,以各类竞赛为驱动,结合线性代数在各类工程复杂问题中的应用,从计算机图形学、图像处理或密码学等方面对线性代数进行了教学案例挖掘和实验设计。

Q 可视化线性代数教学改革的缘由和目标

对工科学生而言,线性代数的教学不应只从理论角度讲解抽象的知识点。教学中,教师应做到以学生为中心,从几何直观、实际应用的角度引导学生思考。使学生了解如何在实际工程中使用这些知识点,激发学生学习积极性,为学生提供更多参与创新实践的机会,培养学生利用数学解决实际问题的能力。通过提出探究性问题,教师可以激发学生兴趣,提高学生的参与感,使他们感受到科学研究的快乐。

Q “可视化”线性代数教学改革内容

(一)线性代数理论模块的几何直观

本节针对线性代数课程中的抽象概念理解和重要知识模块给出几何解释,形成一系列可视化的定义形式,并进行了实验设计。

1.线性变换的几何意义

线性代数以向量空间和线性变换为核心。在几何学中,矩阵可以看作是从一个向量空间到另一个向量空间的线性变换。而线性变换对于向量空间中许多问题的研究有重要作用,同时,线性变换也在工程中得到了广泛应用。通过设计实验,学生可以直观看到,只要选取适当的线性变换 $y = Ax$,便可生成想要的图形效果。教师可以引导学生选取不同矩阵 A ,尝试利用不同的线性变换 $y = Ax$,观察其产生的结果。对线性变换几何直观的理解有助于逆阵的计算。

设, x 和 y 是两个 2 维列向量满足,求到的自转角。

由于是对逆时针旋转，是对顺时针旋转，则是对逆时针旋转，是对逆时针旋转，所以线性变换，到的自转角为。

借助 Geogebra 等工具，教师可以先绘制出原始向量，然后将向量与旋转变换矩阵相乘，得到变换后的坐标。再绘制出变换后的向量，动态展示线性变换过程，帮助学生理解矩阵对向量作用后产生的几何效果。

2.特征值、特征向量的几何意义

在分析一个线性变换对整个空间的作用效果时，特征值及其对应的特征向量起着关键作用。首先，对于特征值及特征向量，教师可以考虑 A 为二阶方阵的情况，让学生尝试利用 Matlab 中的演示函数 eigshow 显示单位圆周上的向量 x 经线性变换 Ax 后生成的向量 y 。同时，教师需要提醒学生注意演示的过程中是否会出现向量 Ax 和 x 在同一直线上的情况，这意味着 Ax 和 x 相位相同，而只存在一个乘子 λ 的差别，即 $Ax = \lambda x$ 。基于此，乘子 λ 就是矩阵 A 的特征值，而对应的向量 x 就是 A 关于 λ 的特征向量。利用特征值和特征向量，还可以将复杂的线性变换进行分解，便于更好地理解 and 描述整个线性变换的几何本质。以主成分分析 (PCA) 的实际应用为例，其基于特征值和特征向量可以找到数据变化最大的几个方向，实现数据的降维和特征提取等操作。总之，特征值和特征向量从几何角度为理解线性变换在空间中的作用提供了有力的工具，让学生能够清晰地把握空间中向量在变换前后方向和长度的变化情况、了解整个变换的核心特点。

3.线性代数中“正交变换保持图形几何性质不变的特性”通过实验可视化

正交变换保持向量长度和夹角不变，其可以将一个图形变换为与其全等的图形。也就是说，经过正交变换后的图形与原图形在形状和大小上完全相同，只是位置和方向可能发生了变化。例如，一个圆经过正交变换后仍然是一个圆，且半径不变；一个正方形经过正交变换后还是一个正方形，其边长和内角大小都不会改变。利用正交变换保持图形几何性质不变的特性，可以解决复杂的二次曲面(线)的形状问题。一些二次曲面，直接看不出它的图形类别，而通过正交变换之后，其曲面类型可以直观地判断。这个过程相当于求矩阵的特征值和特征向量。用特征向量组成正交矩阵，将二次型对角化，简化二次型，可以判断二次曲面的类型。

4.线性代数中“施密特正交化求等价正交向量组的问题”从几何角度解释

以三维空间为例，教师可以依据向量间的基本关系和内积定理，演示施密特正交化过程，引导学生探讨施密特正交化的几何意义、施密特正交化的计算方法，帮助学生理解施密特正交化空间几何意义。在计算机图形学的教学中，教

师常常需要构建正交坐标系来描述物体的位置、方向和姿态等信息。施密特正交化可用于从给定的一组线性无关向量中生成正交坐标系，为图形的建模、渲染和动画等提供基础的数学框架。

5.线性代数中“线性方程组的求解问题”从几何角度解释

以三元线性方程组为例，教师可以根据线性方程组解的三种情况(无解、无穷多解、有唯一解)，使学生通过平面之间的位置关系平行、相交于一条直线或一个点几何直观感受解的三种情况，加深学生对线性方程组求解问题的理解。在三维空间中，对于第一个方程组，将每个方程看作一个平面，由于它们重合，可通过动态展示不同的点都在这个重合平面上满足方程组，体现无穷多解；对于第二个方程组，绘制出两个平行的平面(代表两个方程)，表明不存在同时在这两个平行平面上的公共点，即无解。教师可以使用专业的数学可视化软件来进行三维图形的绘制与演示。

(二)线性代数在几个实际问题中的应用

教师可以针对线性代数在计算机图形学、图像处理、密码学和数据处理等方面的实际应用进行教学实验设计，组织一系列操作简单、容易理解的实验，使学生深入理解线性代数的同时，对图像处理、密码学和数据处理等也有进一步了解和认知。

1.在计算机图形学中的应用

线性代数在计算机图形学中的应用非常广泛，涉及坐标系、向量、矩阵、变换等方面。计算机图形学中的各种图形都是在坐标系中进行描述，图形的形状用向量表示。矩阵的加法、数乘、乘法可以对应图片的各种处理，包括图片的合成，美白，拉伸、旋转等等。矩阵变换可以将一个平面图形变换成为三维图形，矩阵的逆矩阵可以获得与原图形相反的图形，实现曲线的变形。在三维图形透视投影需要用到线性代数中的矩阵变换和三维坐标矩阵进行计算。例如，在计算机游戏和电影特效的制作需要对三维模型进行透视投影，以实现更加真实的视觉效果。

2.图像处理中的应用

通过矩阵的奇异值分解、矩阵加法运算，可以实现图像压缩以及合成水印图像。图像有损压缩的效果主要取决于压缩矩阵的程度，这需要根据具体需求权衡压缩比和图像质量之间的关系，其中关键因素就是奇异值的计算和选取。教师可以引导学生课余时间练习更换自己的图片和奇异值的个数。教师还可以组织合成水印图像的实践活动，向学生展示如何将一个小水印图像嵌入到一个目标图像中，并给学生留以足够的空间进行实践，提高学生的知识理解与实践能力。在图像处理领域，矩阵的秩被用于图像压缩、图像修复等任务。降低图像矩阵的秩，可以有效地减少图像数据

的存储量,保持图像的主要信息。此外,利用矩阵的秩还可以进行图像去雾、图像超分辨率等处理。

3.在图像加密中的应用

教师可以通过随机扰乱图片信息的行列,随机扰乱图片信息的像素点,对像素点的 RGB 值进行缩放等行为,引导学生进行图像加密的实验操作。此外,对称密码体制如 AES 算法设计中的行移位涉及线性变换,列混合涉及矩阵的相乘运算;流密码算法设计中线性反馈移位寄存器的工作原理以及反馈函数系数的确定涉及线性方程组求解问题;抗量子密码体制如基于纠错码的密码体制-线性码,其校验过程中包含了线性代数的线性空间、基、生成矩阵、矩阵运算等部分。

4.在数据处理中的应用

线性代数在数据挖掘、机器学习、信号处理等领域有着广泛的应用。例如,线性回归模型可以通过求解线性方程组,拟合数据,预测变量之间的关系。在机器学习中,矩阵的秩可被用于特征选择、数据降维等任务。通过计算数据矩阵的秩或进行低秩近似,可以识别出数据中的关键特征,降低数据的维度,提高模型的训练效率和泛化能力。在信号处理中,快速傅里叶变换(FFT)是傅里叶变换的一种高效算法实现,其核心思想是基于线性代数中的矩阵分解和向量运算。将离散傅里叶变换矩阵分解为一系列稀疏矩阵的乘积,可以大幅减少计算量,提高计算效率。

“可视化”线性代数教学改革实施方案

(一)教学前期准备与实施

教师可以将制作的实验内容,编排到相关内容的后面,在课堂教学中,利用 3-5 钟时间进行相关实验展示。对于理论论证实验以及开放式探究问题,教师可鼓励学生利用课余时间进行实验,实验结果可通过腾讯课堂提交。这种方式灵活有效,能保持学生学习兴趣且不增加考核要求,对培养学生求知欲极为有利。

(二)教学结束与反思

教师可以:定期收集学生的反馈意见,通过问卷调查、在线投票等方式,了解学生对教学内容、教学方法、教学资源等方面的意见和建议;自我评价,进行教学反思;对实验内容,各环节进行改进和完善;合理安排教学内容和教学时间,形成以教学内容为导向的配套实验课教案,为线性代数教学改革提供参考和借鉴。事实上,可视化交互式教学手

段还可以融入其他课程的教学,如高等数学。在高等数学授课过程中,教师可以结合 Matlab 生成的动画演示,构建直观的空间曲线、空间曲面等图形,使三大运算极限、求导、积分上可视化,形成视觉冲击,帮助学生加深理解。

结束语

本项目重在强化实践教学环节,针对线性代数中的抽象概念和定理的可视化描述,在计算机图形学、图像处理和密码学应用中的几何直观解释问题,开发设计实验并用代码实现。教师在课堂上引入 Matlab 求解和可视化,可以使得计算变得简捷,促进学生对概念的理解。本文设计的实验可在所任教小班级进行试验,后期可直接推广到线性代数的各开课专业学生中学习使用,以助推有创新能力、实践能力的应用型、复合型人才的培养。

参考文献

- [1]褚鹏飞,路云.浅谈 GeoGebra 软件在线性代数可视化教学中的应用[J].大学数学,2024,40(01):56-64.
- [2]刘与嘉,周小辉.线性代数教学中若干“可视化”教学案例[J].高等数学研究,2024,27(01):85-90.
- [3]常文.论大学数学教学中可视化方法的应用——评《线性代数(第二版)》[J].中国高校科技,2023(07):111.
- [4]张颖,张会生.线性代数可视化教学的若干实践[J].电脑知识与技术,2023,19(18):106-109.
- [5]李清华,王宝娟.线性代数知识点的可视化教学设计探索与实践[J].大学数学,2022,38(02):112-119.
- [6]王宁宁,黄云.工程数学可视化教学辅助平台的设计和研究[J].信息通信,2020(10):70-72.

基金项目:

2024 年大连海事大学教改项目,项目名称:可视化《线性代数》教学的案例挖掘和实验设计,基金编号:BJG-C2024104;2024 年大连海事大学教改项目,项目名称:基于数智技术的创新人才培养的课程教学改革与实践,基金编号:BJG-C2024103。

作者简介:

张颖(1977—),女,汉族,吉林通化人,博士,副教授,大连海事大学理学院,研究方向:代数学、密码学。

陈国艳(1978—),女,汉族,黑龙江绥化人,硕士,副教授,大连海事大学理学院,研究方向:数学教育学、创新创业教育。